Appunti del corso "Fondamenti di Analisi e Didattica"

(PAS 2013-2014, Classe A049, docente prof. L. Chierchia)

redatti da:
A. Damiani, V. Pantanetti, R. Caruso, M. L. Conciatore, C. De Maggi, E. Becce
e rivisti da: L. Chierchia
(Le note a piè di pagina sono dei redattori)

Lezione 2.
La definizione assiomatica dei numeri reali

La "definizione" dei numeri reali è un argomento assai complesso che ha trovato una soluzione rigorosa solo alla fine del 1800. Sono solo del 1872, infatti, i contributi fondamentali dati da Cantor, Dedekind e Leray sull'argomento. In tali contributi si "costruisce" un modello dei numeri reali a partire dai numeri razionali, la cui "conoscenza" è assunta.
In effetti la questione è più complessa in quanto, con questo approccio, si riconduce la fondazione rigorosa dei numeri reali a quello dei numeri razionali o dei numeri naturali (argomento che verrà trattato in lezioni successive).
Una "scorciatoia" concettualmente accettabile e comunque rigorosa è quella di dare *direttamente* una definizione assiomatica dei numeri reali: questo è l'approccio più comune, ad esempio, adottato nella maggior parte dei manuali moderni di analisi matematica.
Nella lezione di oggi discuteremo, appunto, la definizione assiomatica dei numeri reali.

Assiomatica di $\mathbb{R}$

Assumiamo la conoscenza della "insiemistica della logica elementare", senza discutere oltre cosa questo significhi.
Occorre in via preliminare aver definito alcune nozioni:

DEFINIZIONE (Applicazione): Si definisce *applicazione* dall'insieme A all'insieme B una legge che associa ad ogni elemento di un sottoinsieme di A (eventualmente coincidente con A), detto *dominio*, uno ed un solo elemento di un sottoinsieme di B, detto *codominio*.

DEFINIZIONE (Prodotto cartesiano): Dati gli insiemi A e B, si definisce *prodotto cartesiano* di A per B l'insieme $A \times B$ formato dalle coppie ordinate del tipo (a, b) con $a \in A$, $b \in B$.

DEFINIZIONE (Applicazione binaria): Si definisce *applicazione binaria* un'applicazione di $A \times B$ in C, dove A,B,C sono insiemi (non necessariamente distinti).

DEFINIZIONE (Relazione): Si definisce *relazione* fra due insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

DEFINIZIONE (Relazione di equivalenza): Si definisce *relazione di equivalenza* una relazione definita su $A \times A$ che risulti *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

DEFINIZIONE (Relazione d'ordine): Si definisce *relazione d'ordine* una relazione definita su $A \times A$ che risulti *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*.

DEFINIZIONE (Relazione d'ordine totale): La relazione d'ordine $T \subseteq A \times A$ si dice *totale* se $\forall x, y \in A : (x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

$\mathbb{R}$ = "numeri reali" è un insieme dotato di due operazioni binarie $(+, *)$, di una relazione di ordine totale $(\geq)$, e che soddisfa le proprietà elencate nella seguente tabella[1].

[1] Esistono diversi modi per ricordare i 16 assiomi. Fra di essi, quello basato su un personaggio della celebre serie di fantascienza *Star Trek*, il signor *SPOCK*: Somma, Prodotto, Ordine, Combinazione (di operazioni), Kompletezza. Accanto ad essa, i numeri 4-4-4-3-1 si ricordano abbastanza facilmente.

Gli assiomi di $\mathbb{R}$

Assiomi dell'operazione additiva	
S_1	Proprietà commutativa della somma $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
S_2	Proprietà associativa della somma $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$
S_3	Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma $\exists 0 \in \mathbb{R} / a + 0 = a \ \forall a \in \mathbb{R}$
S_4	Esistenza dell'opposto $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R} / \ a + (-a) = 0$
Assiomi dell'operazione moltiplicativa	
P_1	Proprietà commutativa del prodotto $\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = b * a$
P_2	Proprietà associativa del prodotto $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b * c) = (a * b) * c$
P_3	Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto $\exists 1 \in \mathbb{R} / a * 1 = a \ \forall a \in \mathbb{R}$
P_4	Esistenza dell'inverso per tutti gli elementi tranne 0 $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / \ a * a^{-1} = 1$
Assiomi del'ordine	
O_1	Riflessività della relazione $\geq$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq a$
O_2	Antisimmetria della relazione $\geq$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b, b \geq a \Rightarrow a = b$
O_3	Transitività della relazione $\geq$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$
O_4	La relazione $\geq$ è di ordine totale $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \Leftrightarrow \neg \ b \geq a$
Assiomi della combinazione di operazioni	
SP	Distributività della somma rispetto al prodotto $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b + c) = a * b + a * c$
PO	Ordinamento del prodotto $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$
SO	Invarianza per traslazione $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$
Assioma della completezza	
C_1	Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.

Le definizioni necessarie alla comprensione dell'ultima assioma di completezza sono le seguenti. Un sottoinsieme A di R si dice limitato superiormente se esiste un $M \in \mathbb{R}/a \leq M \ \forall a \in \mathbb{R}$. Un tale M si chiama *maggiorante* di A. L'estremo superiore di A, se esiste, si indica con $sup\,(A)$, ed è per definizione il più piccolo dei maggioranti di A. Intuitivamente, l'assioma di completezza riempie i "buchi" lasciati da Q.

Conseguenze della definizione di $\mathbb{R}$

Tutte le proprietà dei numeri reali non esplicitamente citate nei sedici assiomi sono dimostrabili a partire da essi, quindi si tratta di teoremi. Ne sono esempi:

TEOREMA: Unicità dell'elemento neutro moltiplicativo: $a{*}b = a \Rightarrow b = 1$ (se $a, b \neq 0$)

TEOREMA: L'elemento neutro della somma è elemento assorbente del prodotto: $\forall a \in \mathbb{R} : a * 0 = 0$.

TEOREMA: $1 > 0$ ($a > b$ significa $a \geq b$ e $a \neq b$).

Vediamo ora come si individuano i sottoinsiemi numerici fondamentali di $\mathbb{R}$, ossia, i numeri naturali $\mathbb{N}$, i numeri relativi $\mathbb{Z}$ ed i numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Costruzione di $\mathbb{N}$

DEFINIZIONE (sottoinsieme induttivo): Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *induttivo* se:

- $1 \in A$
- $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

ESEMPIO 1: $\mathbb{R}$ è induttivo.

ESEMPIO 2: $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ è induttivo .

Possiamo ora dare la definizione di $\mathbb{N}$:

DEFINIZIONE (Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali): $\mathbb{N}$ è l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$. In simboli:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{R} | F \text{ è induttivo}\} \Rightarrow \mathbb{N} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

Cioè data la famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi F di $\mathbb{R}$ tali che F sia induttivo, $\mathbb{N}$ è l'intersezione[2] degli F appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$.

Possiamo ora dimostrare un teorema:

TEOREMA ("Principio" d'induzione):

Sia P_n una proprietà (una proposizione) che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Se P_1 è vera e $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ allora P_n è vera per ogni n.

DIM: Definisco $A = \{n \in \mathbb{N} | P_n \text{ è vera}\}$. So per ipotesi che $1 \in A$ e che $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$, quindi A è induttivo, dunque $\mathbb{N} \subseteq A$ (perché $\mathbb{N}$ è intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ e quindi è contenuto in qualunque insieme induttivo). Ma per definizione $A \subseteq \mathbb{N}$ quindi A ed $\mathbb{N}$ coincidono.

Costruzione di $\mathbb{Z}$

DEFINIZIONE (Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi): Definiamo $\mathbb{Z}$ come unione di $\mathbb{N}$, di $-\mathbb{N}$ (dove $-A$ è per definizione $\{x = -a | a \in A\}$) e l'elemento 0:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \ -\mathbb{N} \cup \{0\}$$

Costruzione di $\mathbb{Q}$

DEFINIZIONE (Insieme $\mathbb{Q}$ Definiamo $\mathbb{Q}$ come numeri della forma

$$n \times m^{-1} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$$

[2]Resta da dimostrare che l'intersezione, peraltro non finita, di sottoinsiemi induttivi è ancora un insieme induttivo.

La definizione assiomatica di $\mathbb{R}$ può sembrare "complicata" basandosi su sedici assiomi di cui, l'ultimo, l'assioma di completezza, a prima vista non così "naturale" (certamente non lo era per i matemtici "antichi"). Un punto di vista apparentemente più semplice è quello di definire assiomaticamente l'insieme numerico più "semplice", ossia quello dei numeri naturali e poi da questi costruire gli altri insiemi numerici (percorso, però ben più lungo e complesso e, che d'altra parte, può comunque lasciare insoddisfatti).

Definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ (Peano)

DEFINIZIONE : Esiste un insieme $\mathbb{N}$ e un'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che:

Gli assiomi di Peano

N_1	σ è iniettiva
	$\forall a, b \in \mathbb{N} \mid \sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow a = b$
N_2	Esiste un elemento α in $\mathbb{N}$ che non appartiene a $\sigma(\mathbb{N})$
	$\exists\, \alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha \notin \sigma(\mathbb{N})$
N_3	Vale
	$A \subseteq \mathbb{N}, \alpha \in A, (n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A) \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$
	("principio di induzione")

Come costruire gli insiemi numerici a partire da $\mathbb{N}$ sar 'a argomento della prossima lezione.

Come già detto la definizione assiomatica di $\mathbb{N}$, nonstante la evidente semplificazione e "naturalezza" degli assiomi (rispetto, soprattutto a quelli di $\mathbb{R}$) può comunque lasciare insoddisfatti: chi dice infatti che *un tale insieme esista veramente*?

Una possibilità è quella di "costruire" $\mathbb{N}$ a partire dall'insiemistica ed in particolare dalla teoria rigorosa degli insiemi di Zermelo–Frenkel, una teoria complessa e comunque basata su un set di assiomi ben più "sofisticati" di quelli di Peano. Qui, diamo ora solo una *idea intuitiva* di come costruire $\mathbb{N}$ a partire dalla teoria degli insiemi.

La definizione di $\mathbb{N}$ dalla teoria degli insiemi

DEFINIZIONE (Insiemi equipotenti): Due insiemi si dicono *equipotenti* esiste un'applicazione biunivoca fra di essi.

A questo punto, si definisce:

1 = classe di equivalenza degli insiemi equipotenti con l'insieme che contiene il solo insieme vuoto.

2 = classe di equivalenza degli insiemi equipotenti con l'insieme che contiene l'insieme vuoto e l'insieme che contiene il solo insieme vuoto.

etc.....